Stokastik Matrisin k-inci Kuvveti

Kare Matrisin Özdeğeri ve Özvektörü

Farz edelim ki A nxn boyutlu bir matristir. $\lambda \neq 0$ ve X sütun vektörü olmak üzere $AX = \lambda X$ sağlandığında λ ya A matrisinin özdeğeri, X vektörüne ise bu özdeğere karşılık gelen özvektör denir. $|A - \lambda I|$ determinantının kökleri özdeğerleri verir.

Uyarı. *Eğer matris stokastik matris ise özdeğerlerden biri* $\lambda_1 = 1$'dir.

Teorem. A nxn boyutlu ve özdeğerleri birbirinden farklı bir matris ise, aşağıdaki formül ile A matrisinin k-ıncı kuvveti hesaplanır.

$$A^{\mathbf{k}} = \lambda_1^{\mathbf{k}} B_1 + \lambda_2^{\mathbf{k}} B_2 + \cdots + \lambda_n^{\mathbf{k}} B_n , \qquad \mathbf{k} = 0,1,2, \ldots .$$

Burada $m = 1, 2, \ldots, n$ için

X_m ve Y_m , A matrisinin sırasıyla sağ ve sol özvektörleridir. Yani, $A\,X_m = X_m\ \lambda_m$ ve $Y_m\ A = \lambda_m Y_m$. B_m vektörleri ise $B_m = X_m\ Y_m$ eşitliği ile hesaplanır. Ayrıca $X_m\ Y_m = 1$'dir.

Bir A nxn matrisinin öz değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ise o zaman A^k matrisinin özdeğerleri $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$ olur ve aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\text{İ}z(A^k) = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k$$

.

Örnek. $P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$ geçiş matrisi olduğuna göre $p_{01}^{(100)}$ ve $p_{11}^{(100)}$ olasılıklarını bulunuz.

Çözüm. Yukarıdaki teoremden

$$P^{\mathbf{k}} = \lambda_1^{\mathbf{k}} B_1 + \lambda_2^{\mathbf{k}} B_2 , \qquad |P - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ ve } \lambda_2 = -0.1$$

$\boldsymbol{m = 1}$ için B_1 matrisi λ_1 ‘ e karşılık gelen özvektördür.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ve $PX = X\lambda_1$ için $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Yukarıdaki denklemin çözümünü ancak $X = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ sağlar böylece sağ özvektör bulunur.

$Y = (y_1 \quad y_2)$ ve $YP = \lambda_1 Y$ için

$$(y_1 \quad y_2)\begin{pmatrix}0.2 & 0.8\\0.3 & 0.7\end{pmatrix} = 1.(y_1 \quad y_2)$$

$$\Rightarrow \quad 0.3y_2 = 0.8\, y_1$$

Bulunur ayrıca, $YX = 1$ eşitliğinden $(y_1 \quad y_2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1 \qquad \Rightarrow y_1 + y_2 = 1.$ Bu iki bilinmeyenli denklem çözüldüğünde $y_1 = \frac{3}{11}$, $y_2 = \frac{8}{11}$. Sol özvektör $Y = \begin{pmatrix}\frac{3}{11} & \frac{8}{11}\end{pmatrix}$ bulunur.

$$B_1 = XY = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{11} & \frac{8}{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/11 & 8/11\\3/11 & 8/11\end{pmatrix}.$$

$P^{\mathbf{k}} = \lambda_1^{\mathbf{k}} B_1 + \lambda_2^{\mathbf{k}} B_2$ denkleminde $k = 0\ alındığında,$
$I = B_1 + B_2$.

$$B_2 = I - B_1 \Rightarrow \quad B_2 = \begin{pmatrix}8/11 & -8/11\\-3/11 & 3/11\end{pmatrix}$$

Yukarıdaki $P^{\mathbf{k}} = \lambda_1^{\mathbf{k}} B_1 + \lambda_2^{\mathbf{k}} B_2$ denkleminde bulduğumuz değerleri

yerine koyarsak

$$P^{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix}0.2 & 0.8\\0.3 & 0.7\end{bmatrix}^k = 1^{\mathbf{k}}\begin{pmatrix}3/11 & 8/11\\3/11 & 8/11\end{pmatrix} + (-0.1)^{\mathbf{k}}\begin{pmatrix}8/11 & -8/11\\-3/11 & 3/11\end{pmatrix}$$

$$p_{01}^{(100)} = 1^{100}(8/11) + (-0.1)^{100}\ (8/11\,) \cong (8/11\,)$$

$$p_{11}^{(100)} = 1^{100}(8/11) + (-0.1)^{100}\ 3/11 \ \cong (8/11\,)$$

Uyarı. Bu yöntemde 2x2 boyuttan daha büyük matrislerin k-ıncı kuvvetini bulmak zor olduğundan aşağıdaki Teorem veriliyor

Teorem. A nxn boyutlu kare matrisi olsun $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$'ler de A'nın farklı özdeğerleri olsun. A' nın ve λ_r'nin fonksiyonları aşağıdaki gibi veriliyor.

$$f(A) = C_{n-1}A^{n-1} + C_{n-2}A^{n-2} + \cdots + C_1 A + C_0 I$$

$$f(\lambda_r) = C_{n-1}{\lambda_r}^{n-1} + C_{n-2}{\lambda_r}^{n-2} + \cdots + C_1\lambda_r + C_0, \quad r = 1,2,\ldots,n.$$

Örnek. Bir Markov zincirinin adım geçiş matrisi aşağıdaki gibi veriliyor.

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

P Matrisinin k-ıncı kuvvetini hesaplayalım.

Çözüm. $n = 3$ için $P^{\mathbf{k}} = C_2 P^2 + C_1 P + C_0 I$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır. C_0, C_1, C_2 katsayılarını bulabilmek için önce P Matrisinin $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ öz değerlerini bulalım. P matrisi bir stokastik matris olduğundan $\lambda_1 = 1$ olduğunu biliyoruz.

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ve $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = (3/2)$ denklemlerinden

$\lambda_2 = -1/2$ ve $\lambda_3 = 1/2$ olarak bulunur. Şimdi

$$\lambda_1^{\mathbf{k}} = C_2{\lambda_1}^2 + C_1\lambda_1 + C_0,$$

$$\lambda_2^{\mathbf{k}} = C_2{\lambda_2}^2 + C_1\lambda_2 + C_0$$

$$\lambda_3^{\mathbf{k}} = C_2{\lambda_3}^2 + C_1\lambda_3 + C_0$$

Denklem takımından

$$C_0 = (\frac{1}{2})^{\mathbf{k}} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{\mathbf{k}} - \frac{1}{3}$$
$$C_1 = (\frac{1}{2})^{\mathbf{k}} - (-\frac{1}{2})^{\mathbf{k}}$$
$$C_2 = \frac{4}{3} - 2(\frac{1}{2})^{\mathrm{k}} + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^{\mathbf{k}}$$

Katsayıları hesaplanır ve

$$P^k = \frac{4}{3} - \left[2(\frac{1}{2})^{\mathbf{k}} + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^{\mathbf{k}}\right]\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} +$$

$$+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathbf{k}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{\mathbf{k}}\right]\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$+\left[[\,(\frac{1}{2})^{\mathbf{k}} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{\mathbf{k}} - \frac{1}{3}\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.